Programme de colle n°22 (S23)
Semaine du 30 mars au 5 avril

MPSI 1

Mathématiques

Espaces vectoriels de dimension finie

1 Théorie de la dimension

— Si f est linéaire, alors $f\left(\text{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right) = \text{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$.
— Familles génératrices, familles libres. Bases. Coordonnées d'un vecteur dans une base.
— Lemme de l'échange.
— Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases ont même cardinal. Dimension d'un espace de dimension finie.
— Théorème de la base incomplète (formes faibles et fortes). Théorème de la base extraite.
— Les bases sont les familles libres maximales et les familles génératrices minimales.

2 Applications linéaires en dimension finie

— Image d'une famille libre par une application linéaire injective, d'une famille génératrice par une application linéaire surjective.
— Caractérisation d'une application linéaire sur une base.
— Isomorphismes et dimension. Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$.
— Rang d'une application linéaire. Le rang est conservé par composition par un automorphisme.
— Théorème du rang (u induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ sur $\text{Im}(u)$).
— Formule du rang.
— Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\dim(E) = \dim(F)$, alors u est un isomorphisme ssi u est injective ssi u est surjective.
— En dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est inversible ssi u est inversible à gauche ssi u est inversible à droite.
— Formes linéaires et hyperplans. Dimension de l'intersection de m hyperplans. Tout *sev* de dimension m est l'intersection de $n - m$ hyperplans.

3 Calcul de dimension

— Sous-espaces vectoriels d'un ev de dimension finie.
— Tout sev d'un ev de dimension finie admet un supplémentaire.
— Dimension d'un produit cartésien. Dimension d'une somme directe, puis d'une somme.

Cours : $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E ssi $\forall x \in E,\ \exists!\,(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; image d'une famille libre par une applications linéaire injective et d'une famille génératrice par une application linéaire surjective ; caractérisation d'une application linéaire en dimension finie ; formule du rang.